В.П. Пяткин, Г.И. Салов

ОБНАРУЖЕНИЕ ПОЯВЛЕНИЯ ОБЪЕКТА В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗАШУМЛЕННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Введение. Обратимся к проблеме скорейшего обнаружения появления объекта, которая состоит в следующем. Наблюдателю предстоит анализировать последовательно поступающие к нему зашумленные изображения X_1, X_2,…. На первых изображениях интересующий его объект отсутствует, а затем, начиная с изображения с неизвестным заранее номером, появляется. Наблюдатель должен обнаружить важный для него объект как можно скорее - по минимальному числу изображений после момента появления объекта. Эта проблема весьма важна для создания разного рода информационных систем (научного, военного и гражданского назначения). Она является обобщением другой известной трудной задачи - задачи обнаружения важного объекта на одном изображении (непоследовательный случай). Присутствие объекта на изображении проявляется в изменениях (вероятностных) характеристик изображения. Эти изменения часто весьма малы и носят лишь случайный характер. Поэтому для обнаружения таких изменений, а вместе с ними и объекта, необходимо применять статистические правила (критерии), позволяющие как можно лучше учитывать имеющуюся и наблюдаемую информацию.

1. Непоследовательный случай. Обозначим через $D \in R^2$ (прямоугольную) область , на которой определены все наблюдаемые изображения. Можно рассматривать пространство $L(D)$ всевозможных реализаций изображений, в частности (в простейшем случае) - пространство всех действительных функций, определенных на D. Вероятностные закономерности наблюдаемого изображения обусловливаются распределением вероятностей P на пространстве $L(D)$. Задача обнаружения объекта на одном наблюдаемом изображении $X = X(u)$, $u \in D$, может рассматриваться как задача с двумя предположениями (гипотезами) H_0: $P = P_0$ и H_1: $P = P_1$ относительно распределения P. Нулевая гипотеза H_0 соответствует случаю, когда важного объекта нет. При альтернативной гипотезе H_1 изображение X содержит важный объект. Для обнаружения объекта требуется найти критерий для различения этих двух гипотез. Как известно, оптимальный критерий, отклоняющий гипотезу H_0, когда она ложна, с наибольшей вероятностью, строится с помощью отношения правдоподобия. Если при небольшом конечном числе точек из области D вопрос о существовании и виде отношения правдоподобия теоретически не возникает, то в случае (бесконечно) большого числа точек, в частности при учете целой реализации изображения $X(u)$, $u \in D$, этот вопрос встает во всей полноте. В последнем случае отношение (функционал) правдоподобия совпадает с производной Радона-Никодима $\rho = dP_1 / dP_0$ на $L(D)$. На практике, однако, вероятностные меры P_0 и P_1 редко бывают известными наблюдателю. Даже когда они известны и функционал правдоподобия существует, отыскание ρ, если меры P_0 и P_1 не являются гауссовскими или каким-либо образом связанными с ними, представляет собой весьма трудную задачу. Поэтому, следуя [1], обратимся к другому подходу.

Обозначим через $\mathbf{E}$ математическое ожидание. Будем обозначать через $Y = Y(u)$, $u \in D$, случайное изображение X, не содержащее важный объект, а через $Z = Z(u)$, $u \in D$, -- содержащее такой объект. Пусть F -- функционал на $L(D)$ такой, что $\mathbf{E}[F(Y)]^2 < \infty$. Если функционал правдоподобия ρ существует и $\mathbf{E}[\rho(Y)]^2 < \infty$, то выражение

$$\max_F \frac{\mathbf{E}[F(Z) - F(Y)]}{\sqrt{\mathbf{D}F(Y)}} \qquad (1.1)$$

где $\mathbf{D}$ – означает дисперсию, достигает максимума при $F = k_1\rho + k_2$. Интуитивно ясно, что и в противном случае, когда $\mathbf{E}[\rho(Y)]^2 = \infty$ или функционал правдоподобия не существует вовсе, функционал F, полученный в результате максимизации (1.1), также будет подходящим для обнаружения объекта. Таким образом, отыскание нужного функционала сводится к вариационной задаче, которую можно решать в удобном с точки зрения вычислений классе функционалов. Ограничимся здесь рассмотрением возможности получения линейного функционала

$$F(X) = \int_D X(u)h(u)du\,. \qquad (1.2)$$

Предположим дополнительно, что

$$\mathbf{E}\left(\int_D Z^2(u)du\right) < \infty, \quad \mathbf{E}\left(\int_D Y^2(u)du\right)^2 < \infty.$$

Практически всегда можно считать, что все реализации случайного изображения X принадлежат гильбертову пространству $L^2(D)$ функций, интегрируемых с квадратом на D.

Обозначим

$$(f,g) = \int_D f(u)g(u)du, \qquad \|f\| = \left(\int_D f^2(u)du\right)^{\frac{1}{2}}$$

скалярное произведение элементов $f, g \in L^2(D)$ и норму элемента f. Результат подстановки (1.2) в (1.1) можно представить в виде

$$\frac{(m_Z - m_Y, h)}{\sqrt{(Bh, h)}}, \qquad (1.3)$$

где $m_Z = m\,(Z;u) = \mathbf{E}\,Z(u)$, $m_Y = m\,(Y;u) = \mathbf{E}\,Y(u)$ -- средние значения в точке $u \in D$, B -- интегральный оператор, ядром которого является $\mu(u,v) = \mathbf{E}\,Y(u)Y(v) - m(Y;u)m\,(Y;v)$. Оператор B является вполне непрерывным, самосопряженным и положительным, отсюда и из (1.3) вытекает следующий факт. Для того, чтобы функционал (1.2) обеспечивал максимум выражению (1.1), необходимо и достаточно, чтобы элемент $h \in L^2(D)$ был решением интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_D \mu(u,v)h(v)dv = m(Z;u) - m(Y;u). \qquad (1.4)$$

Предположим, что ядро $\mu(u,v)$ а также средние значения $m(Z;u)$ и $m(Y;u)$ неизвестны наблюдателю (типичный на практике случай), но в распоряжении наблюдателя имеются (или он может получить) две независимые друг от друга последовательности независимых «точных» реализаций (наблюдений) изображений, не содержащих и содержащих важный объект. Если мы обозначим через $\{Y_n\}$ и $\{Z_n\}$ возможные значения этих последовательностей, то они будут представлять собой две статистически независимые друг от друга последовательности независимых случайных изображений. с распределениями P_0 и P_1 соответственно. Предположим, что существует решение $h \in L^2(D)$ интегрального уравнения (1.4). Предлагаемый ниже специальный алгоритм стохастической аппроксимации дает наблюдателю возможность получить по последовательностям $\{Y_n\}$ и $\{Z_n\}$ сразу последовательность приближенных решений уравнения (1.4), сходящуюся к $h \in L^2(D)$, минуя предварительное оценивание неизвестных ему $m(Z;u)$, $m(Y;u)$, $\mu(u,v)$ и последующее за ним отыскание приближенного решения некорректной задачи с приближенными (с неизвестной точностью) данными, которое весьма сложное.

Предположим: что оператор B строго положительный: $(Bf, f) > 0$ для любого $f \in L^2(D) \setminus \{0\}$ и $\{a_n, n \geq 1\}$ -- последовательность положительных чисел такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty. \qquad (1.5)$$

Теорема. *Пусть существует решение* $h \in L^2(D)$ *интегрального уравнения* (1.4), W_1 -- *произвольный случайный элемент со значениями в* $L^2(D)$ *с* $\mathbf{E}\|W_1\|^2 < \infty$, *статистически независимый от* $\{Y_n\}$ *и* $\{Z_n\}$, *а последовательность случайных элементов* $\{W_n, n \geq 2\}$ *определяется рекуррентной формулой*

$$W_{n+1}(u) = W_n(u) + a_n\{Z_n(u) - Y_{2n}(u)[1 + \int_D (Y_{2n}(v) - Y_{2n-1}(v))W_n(v)dv]\}. \qquad (1.6)$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\| W_n - h \| \to 0, n \to \infty\} = 1, \quad \mathbf{E}\| W_n - h \|^2 \to 0, n \to \infty.$$

Это утверждение вытекает из результатов работы [2]. Подставив построенную с помощью (1.6) оценку W_n для h в (1.2), наблюдатель получит оценку $F^* = F_n^*$ для функционала F

$$F^*(X) = \int_D X(u)W_n(u)du. \qquad (1.7)$$

Используя (1.7), решение о наличии объекта принимается в случае, когда

$$\int_D X(u)W_n(u)du > c_0,$$

где c_0 -- «пороговый» уровень, выбранный надлежащим образом, например, с помощью последовательности $\{Y_n\}$.

2. Последовательный случай.

Предположим X_1, X_2, $\ldots$ - независимые зашумлённые изображения, наблюдаемые последовательно, и каждое X_n $(n = 1, \ldots, \theta - 1)$ имеет распределение вероятностей P_0, в то время как X_n $(n = \theta, \theta + 1, \ldots)$ имеет распределение вероятностей P_1. Другими словами, на первых изображениях важный объект отсутствует и затем появляется в неизвестный (случайный) момент времени θ . P_0 и P_1 не известны наблюдателю, но он имеет (или может получить) две независимых друг от друга последовательности $\{Z_n\}$ and $\{Y_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ точно определённых зашумлённых изображений с важным объектом и без него. Требуется обнаружить этот важный объект как можно скорее при естественном ограничении на величину вероятности «ложной» (преждевременной) «тревоги». Момент времени θ появления важного объекта в наблюдаемой последовательности зашумлённых изображений можно оценить с использованием метода кумулятивных сумм (CUSUM), развитого в [3].

Пусть $\gamma_n = F^*(X_n)$, $S_0 = 0$, $S_n = S_{n-1} + \gamma_n$. В соответствии с методом кумулятивных сумм подходящим здесь будет момент (правило) остановки

$$\tau = \inf\{n: \max_{0 \le k \le n}(S_n - S_k) \ge C + b_n\},$$

где $\{b_n\}$ - не слишком быстро возрастающая последовательность. Эта стратегия допускает и удобное с точки зрения вычислений рекуррентное представление. Пусть $\varsigma_0 = 0$, $\varsigma_n = \max\{0, \varsigma_{n-1} + \gamma_n\}$. Тогда

$$\tau = \inf\{n:\ \varsigma_n \geq C + b_n\}. \qquad (2.1)$$

Отыскание оптимального соотношения между константой C и последовательностью $\{b_n\}$ в методе кумулятивных сумм представляет собой известную трудную задачу.

3. Результаты, полученные при моделировании. В качестве примера, иллюстрирующего применение алгоритма стохастической аппроксимации и метода кумулятивных сумм, приведем пример специально с почти предсказуемым решением h уравнения (1.4). Каждое из зашумлённых изображений имеет ковариационную матрицу вида:

$$\mathbf{E}\,Y(x,y)Y(s,t) \text{ -- } \mathbf{E}\,Y(x,y)\,\mathbf{E}\,Y(s,t) = 40\,e^{-|x-s|}e^{-|y-t|},$$

и моделируется на квадратной сетке 64x64 в [0,1]. Среднее значение яркости каждого из X_n $(n=1,\ldots,\ \theta-1)$ равно 127 плюс амплитуда не важного для наблюдателя объекта в форме числа 4 с уровнем «яркости», равным 15. Среднее значение яркости каждого из X_n $(n=\theta,\ \theta+1,\ \ldots,\ 22)$ равно 127 плюс амплитуда важного для наблюдателя объекта в форме числа 5 с уровнем «яркости», равным 15. При выборе последовательности (1.5) нужно соблюдать некоторую осторожность. Предпочтительнее начинать с медленно убывающих последовательностей умеренных значений. В примере была взята последовательность $\{a_n\}$, у которой

$$a_n = \frac{0.0003}{n^{0.51}}.$$

Результаты моделирования представлены на Рис. 1.

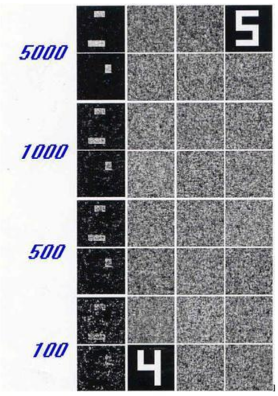

Рис. 1.

В рассматриваемом примере функции (оценки) W_n принимают значения разных знаков. На Рис.1 в самой левой колонке снизу вверх следуют (чередуются) положительные и отрицательные части оценок W_n, полученные согласно (1.6) при $n=$ 100, 500, 1000, 5000. Для исследования была взята оценка W_{500}, полученная при $n=$ 500, на глаз эта оценка уже в большой степени отражает вид решения $h(u)$, и соответственно функционал

$$F^*(X) = \int_D X(u)W_{500}(u)du. \qquad (3.1)$$

В результате при применении правила (2.1) с функционалом (3.1) и $C=1.08$, $b_n = \frac{1}{4}n$ к 100 наблюдаемым последовательностям изображений вида $X_1,...,X_{22}$, содержащим только символ числа 4, лишь при пяти из них была объявлена «ложная тревога». На Рис.1 внизу второй колонки представлен без шума символ числа 4. Выше во 2-й – 4-й колонках приведена в виде змейки наблюдаемая последовательность зашумленных изображений $X_1,...,X_{22}$, у которой, начиная с номера $\theta = 16$ символ числа 4 заменен на символ числа 5. С помощью указанного правила появление символа 5 было обнаружено лишь с небольшой задержкой, а именно при $\theta = 18$.

Заключение. Полученные в примере результаты свидетельствуют об эффективности рассматриваемого подхода. Заметим, что пример рассматривается лишь с иллюстративной целью. Оптимизация параметров представляет собой отдельную и не простую задачу. Наконец, рассматриваемый подход имеет решительное преимущество с точки зрения необходимых вычислений по сравнению с упомянутым альтернативным.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Гаткин Н.Г., Далецкий Ю.Л. К вопросу об оптимальном выделении сигнала на фоне произвольного шума.// Теория вероятностей и ее применения. 1971. Т. 16, Вып. 4. С 749 - 753.

[2]. Салов Г.И. Об одной теореме стохастической аппроксимации в гильбертовом пространстве и ее приложениях. // Теория вероятностей и ее применения. 1979. Т. 24, Вып. 2. С. 407 - 413.

[3]. Боровков А.А. Математическая статистика. Новосибирск.: Наука, 1997.